

无压渗流问题分析的多节点有限元方法

王兆清¹, 李术才², 李树忱²

(1. 山东建筑大学 工程力学研究所, 济南 250101; 2. 山东大学 岩土与结构工程研究中心, 济南 250061)

摘 要: 采用基于平均值插值的多节点有限元方法分析有自由面渗流问题。在自由面附近采用多节点单元逼近自由面, 利用平均值插值建立多节点单元的形函数, 在远离自由面的区域采用四边形/三角形单元剖分。给定一个初始自由面位置, 通过对渗流控制方程的多节点有限元求解, 根据自由面上节点水头值判断自由面节点的调整方向和大小, 最终迭代求出自由面的位置。土坝渗流问题的数值分析表明了所提方法的有效性和足够的计算精度。

关 键 词: 多节点单元; 有限元方法; 自由边界; 平均值插值; 渗流问题

中图分类号: TV 139.14 **文献标识码:** A

Multi-node finite element approaches for unconfined seepage flow problem

WANG Zhao-Qing¹, LI Shu-Cai², LI Shu-Chen²

(1. Institute of Engineering Mechanics, Shandong Jianzhu University, Jinan 250101, China;

2. Research Center of Geotechnical and Structural Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

Abstract: A multi-node finite element method for numerical simulation of unconfined seepage flow through porous media is presented. Using multi-node elements to approximate the free surface of seepage, the shape functions of multi-node elements are constructed by mean value interpolation. The quadrilateral/triangle elements are used to partition the remainder domain far from the free surface. Giving an initial location of free surface and solving governing equation of unconfined seepage flow problem by multi-node finite element method, according to water head value of nodes on free surface to adjust the location of nodes, the final location of free surface is obtained by iteration technique. Numerical analysis of seepage problem of earth dam shows validity and accuracy of the method.

Key words: multi-node elements; finite element method; free boundary; mean value interpolation; seepage problem

1 引 言

渗流问题是岩土工程领域的一个重要的研究课题, 特别是对于存在渗流自由面即浸润面的问题。在边坡、土坝、地下洞室及地下水运动等渗流分析中, 均涉及渗流自由面问题。岩土体边坡中渗流自由面的确定, 可以明确地下水在边坡中的赋存特性及其运动过程。

含有自由面渗流问题分析的难点在于事先不知道自由面的位置。分析含有自由面渗流问题的主要方法是解析方法和数值方法^[1]。由于实际问题的复杂性, 解析方法在实际工程应用中有很大的局限性。数值方法主要有有限差分法^[2]、有限元方法、边界元方法^[3, 4]和无网格方法^[5]等, 其中以有限元方法应

用最多。有限元法主要采用单元渗透矩阵调整法^[6]、初流量法^[7]、虚节点法^[8]和虚单元法^[9]等固定网格法, 这些方法由于浸润线穿越单元, 处理上存在一定的不便。为解决自由面穿越单元的问题, 郑宏等提出基于变分原理的改进 Bathe 算法^[10], 薛馨、李珏和金吾根等提出了 Trefftz 直接法和间接法^[11, 12]。但 Trefftz 直接法的不足之处是该方法只能求解边界节点值, 求域内各点的值则需借助 Trefftz 间接法。

传统有限元方法求解含有自由面渗流问题的移动网格法, 通过迭代求解自由面的位置^[13]。该方法比较直观, 但是受单元形状(三角形或四边形)的限制, 在迭代过程中容易造成网格畸形, 降低计算精度。本文采用多节点单元和四边形/三角形单元划分计算网格, 利用平均值插值构造多节点单元的形

函数,采用多节点单元逼近自由面,通过迭代求得自由面位置。利用多节点有限单元方法求解渗流问题时,在渗流面附近采用尺寸较大的不规则多节点单元逼近自由面,不但可以减少网格生成的复杂性,而且可以有效地避免迭代过程中单元畸变问题。

2 渗流问题的多节点有限元方法

2.1 渗流自由面问题的控制方程^[13]

对于均质土坝 $ABCD$ 的稳态渗流问题,上水头 h_1 ,下水头 h_2 ,渗流自由面 PS ,溢出面 ST ,如图 1 所示。设水头函数 $u = y + p/\gamma$,这里 p 为流体的压强, γ 为流体的容重。根据 Darcy 定律,二维稳态渗流的基本控制方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} u &= h_1 & \text{on } \Gamma_1 \\ u &= h_2 & \text{on } \Gamma_2 \\ u &= y & \text{on } \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \\ q &= 0 & \text{on } \Gamma_0 \cup \Gamma_4 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $q = \partial\phi/\partial n$, n 为边界 Γ_0, Γ_4 的法线方向。由于在边界 Γ_4 上同时施加了第一类和第二类边界条件,稳态渗流问题的定解问题式 (1) 和式 (2) 是一种偏微分方程自由边值问题。

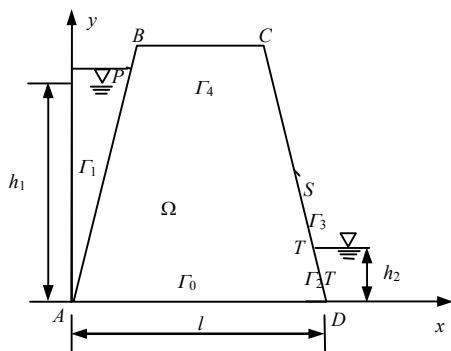


图 1 土坝的稳态渗流问题几何示意图

Fig.1 Sketch of steady seepage problem in earth dam

2.2 多节点有限元方法

多节点单元是指单元形状为多边形,且允许在单元边界上布置若干边界节点的单元。采用多节点有限元方法求解微分方程的边值问题,不但可以简化计算网格生成的工作量,而且对于偏微分方程自由边值问题的迭代求解,可以避免单元的过分变形。

由于采用多项式函数难以建立边数大于 4 的多

边形单元的满足单元间协调性要求的形函数,我们采用多边形平均值坐标^[14]建立多节点单元的形函数。由平均值坐标建立的多边形平均值插值对于温度场等调和函数具有极高的近似精度^[15]。

令 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 为平面上一个多边形 Ω 的顶点,顶点的坐标分别为 $x_1, x_2, \dots, x_n$,这里 $x_i = (x_i, y_i)$ 。顶点按逆时针方向排列, n 为多边形的边数。如果存在一组函数 $\varphi_i: \Omega \rightarrow R, i=1, 2, \dots, n$,使得对多边形内任意一点 $P \in \Omega$,以下性质成立: $\varphi_i(x) \geq 0, \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1, \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)x_i = x, i=1, 2, \dots, n$,则称 $\varphi_i: \Omega \rightarrow R, i=1, 2, \dots, n$ 为多边形上的重心坐标。

显然,多边形的重心坐标是不唯一的, Wachspress 插值^[16]和 Laplace 插值^[17]的形函数都是多边形上的重心坐标。2003 年 Floater 提出另一种形式的重心坐标,称之为平均值坐标。平均值坐标的定义为^[14]

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \\ w_i &= \frac{\tan(\alpha_{i-1}/2) + \tan(\alpha_i/2)}{|P_i - P|} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: w_i 称作权函数; $|P_i - P|$ 为点 P 和 P_i 之间的距离;角度 α_i 的定义如图 2 所示。

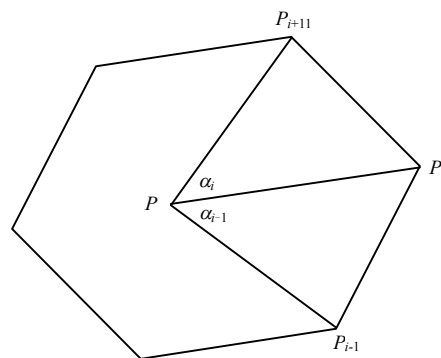


图 2 平均值坐标示意图

Fig.2 Mean value coordinates

利用式 (3) 定义的平均值坐标,以多边形的顶点为插值节点,我们可以定义一种多边形单元上的平均值插值^[15]:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) u_i \quad (5)$$

式中: u_i 为插值节点 P_i 处的函数值。

以平均值插值的基函数作为多边形单元的形

函数, 采用加权残数法可以得到求解 Poisson 方程边值问题的多节点有限元计算公式^[18]。平均值插值在单元边界上是线性的^[15], 由此保证了多边形单元间的协调性^[18]。

2.3 渗流自由面问题的多节点有限元计算

采用多节点有限元分析无压渗流问题, 渗流自由面需要迭代确定。渗流自由面满足 $u = y$ 和 $q = 0$ 两个边界条件, 迭代的步骤如下:

(1) 估计自由面的初始位置, 并给定边界条件 $q = 0$, 将自由边界问题化为固定边界条件问题;

(2) 在求解区域的下部采用四边形/三角形单元, 自由面附近采用多节点多边形单元, 将求解区域划分成四边形/多节点多边形单元网格;

(3) 采用多节点有限元求解渗流场, 得到自由面上节点的水头函数值 u ;

(4) 由 $y = u$ 调整自由面上节点的纵坐标, 同时按比例调整自由面附近多节点单元的边界节点坐标, 仍给定边界条件 $q = 0$;

(5) 重复步骤(2)~(4), 直到第 $n+1$ 步的 $u^{(n+1)}$ 和第 n 步的 $u^{(n)}$ 之间的误差满足 $|u^{(n+1)} - u^{(n)}| < \varepsilon$, ε 为事先指定的计算精度;

(6) 取 $y = u^{(n+1)}$ 作为渗流自由面的计算结果。

3 数值算例

以矩形土坝的无压渗流问题为例, 利用多节点有限元法分析土坝的渗流自由面, 并与该问题的解析解作比较。

采用文献[3]中矩形水坝为算例, 上水头 $h_1 = 6.3014 \text{ m}$, 下水头 $h_2 = 1.2359 \text{ m}$, 坝宽 $l = 6.1592 \text{ m}$ 。初始渗流自由面假设为直线。采用 83 个节点、47 个单元划分求解区域, 节点分布和单元形状如图 3 所示。其中在渗流自由面附近采用 4 个 10 节点单元和一个 14 节点单元逼近自由面形状, 自由面上的节点 62~73 的位置将随迭代过程不断变化。

本算例采用 MATLAB 编写计算程序, 由于各单元的节点数量不一, 采用 CELL 数组存储各单元的节点连通矩阵。所有单元均采用平均值插值建立形函数, 极大地方便了程序的编写。将单元分解为若干三角形, 采用数值积分建立单元传导矩阵^[18]。迭代的控制精度取 10^{-4} , 经过 6 次迭代得到的渗流自由面构型如图 4 所示。数值计算得到的渗流自由面上节点的坐标值、解析解^[3]和文献[3]采用边界元方法得到的结果, 见表 1, 可以看出本文方法的计算精度优于边界元方法。

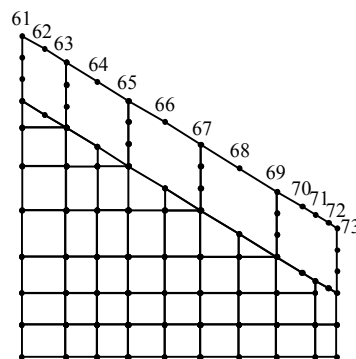


图 3 初始自由面位置和区域离散图

Fig.3 Problem discretization and initial free boundary location

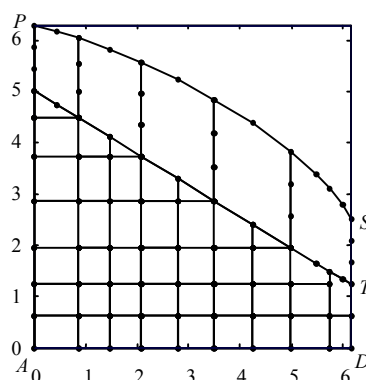


图 4 渗流自由面的最终位置

Fig.4 The final free boundary location

表 1 自由面节点的 y 坐标值

Table 1 y -coordinates value of nodes on free surface

节点	x	y 解析值	y 计算值	文献[3]
62	0.433 0	6.179 0	6.198 0	6.208 0
63	0.866 1	6.055 4	6.058 0	6.057 0
64	1.472 0	5.821 7	5.834 1	/
65	2.078 0	5.576 2	5.572 5	5.597 6
66	2.785 0	5.253 3	5.231 6	/
67	3.492 2	4.843 2	4.843 5	4.856 0
68	4.242 5	4.400 8	4.370 7	/
69	4.992 8	3.814 5	3.817 8	3.853 3
70	5.490 6	3.373 5	3.339 9	3.377 3
71	5.745 3	3.109 6	3.107 0	3.110 3
72	5.996 9	2.800 0	2.810 5	2.795 1

4 结 论

无压渗流自由面问题采用有限元迭代技术求解是一种直观方便的分析方法。多节点有限元方法可以有效地避免传统有限元方法在迭代过程中出现的单元过分畸变的问题。

采用多节点有限元方法求解工程中的偏微分方程边值问题, 可以根据问题的特点灵活地安排单元形状以及每个单元边界上的节点数量和分布, 而无

需考虑单元间的协调性问题。这为复杂几何形状以及移动边界问题的数值计算,带来极大的便利。

多节点有限元方法的所有单元形函数表达式统一,编制计算程序不需考虑单元形状和节点数量,这是多节点有限元方法的一大优点。

本文算例说明,多节点有限元方法是分析无压渗流自由面问题的一种方便有效的数值方法。

参考文献

- [1] 关明芳, 陈洪凯. 渗流自由面求解方法综述[J]. 重庆交通大学学报, 2005, 24(5): 68—73.
GUAN Ming-fang, CHEN Hong-kai. Review of solution methods of seepage free surface of slope[J]. **Journal of Chongqing Jiaotong University**, 2005, 24(5): 68—73.
- [2] 介玉新, 揭冠周, 李广信. 用适体坐标变换方法求解渗流[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(1): 52—56.
JIE Yu-xin, JIE Guan-zhou, LI Guang-xin. Seepage analysis by boundary-fitted coordinate transformation method[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2004, 26(1): 52—56.
- [3] LEONTIEV A, HUACASI W. Mathematical programming approach for unconfined seepage flow problem[J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2001, 25: 49—56.
- [4] 柴军瑞, 仵彦卿. 采用边界元法确定渗流自由面的一种改进方法[J]. 陕西水力发电, 2000, 16(1): 11—12, 41.
CHAI Jun-rui, WU Yan-qing. A modified iterative approach for solving seepage free surface by BEM[J]. **Journal of Shanxi Water Power**, 2000, 16(1): 11—12, 41.
- [5] 葛锦宏, 李广信, 介玉新. 无单元法在有自由面渗流计算中的应用[J]. 计算力学学报, 2003, 20(2): 241—243, 254.
GE Jin-hong, LI Guang-xin, JIE Yu-xin. Application of element-free method to the seepage calculation with free surface[J]. **Chinese Journal of Computational Mechanics**, 2003, 20(2): 241—243, 254.
- [6] 朱军, 刘光廷. 改进的单元渗透矩阵调整法求解无压渗流场[J]. 水利学报, 2001, (8): 49—52.
ZHU Jun, LIU Guang-tin. An improved method for calculating unconfined seepage with changing element conductivity matrix[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2001, (8): 49—52.
- [7] 王媛. 求解有自由面渗流问题的初流量法的改进[J]. 水利学报, 1998, (3): 68—73.
WANG Yuan. The modified initial flow method for 3-D unconfined seepage computation[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 1998, (3): 68—73.
- [8] 凌道盛. 有自由面渗流分析的虚节点法[J]. 浙江大学学报(工学版), 2002, 36(3): 243—246, 326.
LING Dao-sheng. Virtual node method for seepage with free surface problem[J]. **Journal of Zhejiang University (Engineering Science)**, 2002, 36(3): 243—246, 326.
- [9] 吴梦喜, 张学勤. 有自由面渗流分析的虚单元法[J]. 水利学报, 1994, (8): 67—71.
WU Meng Xin-, ZHANG Xue-qin. Imaginary element method for numerical analysis of seepage with free surface[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 1994, (8): 67—71.
- [10] 郑宏, 戴会超, 刘德富. 改进的有自由面渗流问题的Bathe算法[J]. 岩土力学, 2005, 26(4): 505—512.
ZHENG Hong, DAI Hui-chao, LIU De-fu. Improved Bathe's algorithm for seepage problems with free surfaces[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(4): 505—512.
- [11] 薛馨, 金吾根, 李珏, 等. Trefftz直接法解渗流自由面问题[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(13): 2 322—2 326.
XUE Xin, JIN Wu-gen, LI Jue, et al. Solution of free surface seepage problems by Trefftz direct method[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24(13): 2 322—2 326.
- [12] 李珏, 金吾根, 薛馨, 等. Trefftz间接法解自由面渗流问题[J]. 计算力学学报, 2005, 22(3): 295—298.
LI Jue, JIN Wu-gen, XUE Xin, et al. Solution of free surface seepage problems by Trefftz indirect method[J]. **Chinese Journal of Computational Mechanics**, 2005, 22(3): 295—298.
- [13] 毛昶熙. 渗流计算分析与控制(第二版)[M]. 北京: 水利电力出版社, 2003.
- [14] FLOATER M S. Mean value coordinates[J]. **Computer Aided Geometric Design**, 2003, 20(1): 19—27.
- [15] 李淑萍, 王兆清, 路允芳, 等. 凸域上温度分布的无理函数插值近似方法[J]. 山东建筑工程学院学报, 2006, 21(3): 189—192.
LI Shu-Ping, WANG Zhao-Qing, LU Yun-Fang, et al. Irrational function interpolation and temperature distributions approximation within convex domains[J]. **Journal of Shandong Institute of Architecture and Engineering**, 2006, 21(3): 189—192.
- [16] MEYER M, LEE H, BAR A R, et al. Generalized barycentric coordinates on irregular polygons[J]. **Journal of Graphics Tools**, 2002, 7(1): 13—22.
- [17] 王兆清, 冯伟. Delaunay多边形单元的有理函数插值格式[J]. 力学季刊, 2004, 25(3): 375—381.
WANG Zhao-Qing, FENG Wei. Rational function interpolation scheme of Delaunay polygonal elements[J]. **Chinese Quarterly of Mechanics**, 2004, 25(3): 375—381.
- [18] 王兆清. 有理单元法研究[D]. 上海: 上海大学, 2004.